

Санкт-Петербургская математическая олимпиада 2019



Решения задач

4 класс

1. На гранях кубика написаны числа от 1 до 6. Известно, что 1 и 4 на противоположных гранях, а числа 3, 4 и 5 – на соседних гранях с двойкой. Какое число стоит напротив 3?

Ответ: 5. Решение: если 1 и 4 на противоположных гранях, то 2 соседствует с ними обоими. Остальные соседи двойки (3 и 5) оказываются на противоположных гранях.

2. Трудолюбивый Ваня записал календарь на текущий год: «1 января», «2 января», ..., «31 декабря» (дни цифрами, месяцы буквами, номер года вообще ни разу не написан). Каких цифр он использовал больше: восьмерок или девяток?

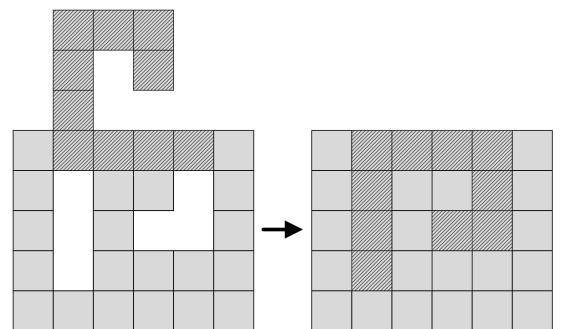


Ответ: восьмёрок. Решение: в каждом месяце, кроме февраля, Ваня пишет три восьмёрки (в числах 8, 18 и 28) и три девятки (9, 19 и 29). Но в феврале нет 29 числа (текущий 2019 год не високосный), поэтому восьмёрок на одну больше.

3. В пейнтболе участвуют 6 игроков. Изначально у каждого по 10 очков. Если один игрок попадает в другого, то попавшему начисляется 2 очка, а у того, в кого попали, снимается одно очко. Может ли в некоторый момент оказаться, что у игроков 18, 11, 9, 8, 8 и 8 очков соответственно?

Ответ: не может. Решение: с каждым попаданием суммарное число очков увеличивается на 1. Изначально было 60 очков, в конце стало 62 очка. Значит, было всего два попадания. Но одна из команд увеличила свои очки на 8, то есть сделала не менее четырёх попаданий. А такого не может быть.

4. Покажите, как разрезать фигуру на две части, из которых можно сложить прямоугольник без «дырок».



Ответ изображён на рисунке.

5. Дан следующий список слов: АНЮТА, АНТОШКА, КАРТОШКА, КАПУСТА, ТАРЕЛКА, ПАЛАТА, ТАРАКАН. Разрешается «приклеивать» слово к концу

цепочки других слов, если две первые буквы слова совпадают с последними двумя буквами цепочки. Можно ли все слова собрать в одну цепочку, если каждое слово не может быть использовано более одного раза?

Ответ: нельзя. **Решение:** допустим, что получилось выстроить слова в одну цепочку. Эта цепочка должна начинаться словом «ПАЛАТА», так как окончания «ПА» нет. Заметим также, что окончание «АН» только одно (в слове «ТАРАКАН»), а начинаются на «АН» два слова («АНТОШКА» и «АНЮТА»), значит, одно из этих слов тоже должно быть в начале цепочки. Противоречие.

6. У города N есть несколько (не менее четырёх) городов-побратимов разного возраста. Возможна ли такая ситуация: возраст города N делится на возраст любого из городов-побратимов, а ровно через десять лет сумма возрастов городов-побратимов будет равна возрасту города N ?

Ответ: да. **Пример:** городу N 120 лет, а побратимам: 60, 12, 10 и 8 лет.

7. На экскурсию пошли ученики третьих и четвертых классов. Третьеклассница Таня заметила, что мальчиков столько же, сколько девочек, а в 4-м классе детей вдвое больше, чем в 3-м. Каждая третьеклассница купила себе два мороженных, а каждый третьеклассник – одно мороженое. А каждый четвероклассник купил по две булочки. Мороженого или булочек было куплено больше? (Под словами «третьеклассник» и «четвероклассник» подразумеваются только мальчики.)



Ответ: булочек было куплено больше. **Решение:** пусть было a третьеклассников, b третьеклассниц, c четвероклассников и d четвероклассниц. Тогда $a + c = b + d$ и $c + d = 2a + 2b$. Складывая эти равенства, получаем $2c = a + 3b$. А нам надо сравнить числа $a + 2b$ и $2c$. Но $2c = a + 3b > a + 2b$, если $b > 0$. А последнее следует из того, что в задаче упоминается третьеклассница Таня.

8. На конференцию приехали 50 рыцарей, которые всегда говорят правду, и 50 лжецов, которые всегда лгут. Их рассадили за 10 столов (не обязательно поровну). Некоторые сказали: «За моим столом не более трёх рыцарей». Остальные промолчали. Какое наибольшее количество таких фраз могло быть сказано?

Ответ: 77 фраз. **Пример:** 9 столов по 3 рыцаря, за десятым столом – остальные. Тогда говорят эту фразу рыцари за малыми столами и все лжецы за большим столом. **Оценка:** за каждым столом сидит не более трёх рыцарей, которые могли сказать эту фразу. Тогда хотя бы за одним столом более трёх рыцарей, то есть говорящих рыцарей не более 27. Говорящих лжецов не более 50.